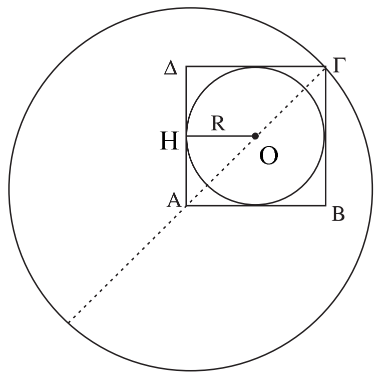
22. α) Είναι ΑΟ = ΟΓ, ΟΗ ⊥ ΑΔ, τότε ΟΗ // ΔΓ.



Στο τρίγωνο ΑΔΓ η ΟΗ = // $\frac{ΔΓ}{2}$ ή

ΔΓ = 2ΟΗ = 2R.

$E_{ΑΒΓΔ} = ΔΓ^2 = (2R)^2 = 4R^2$

β) Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2R η ΑΓ διαγώνιός του. Τότε ισχύει:

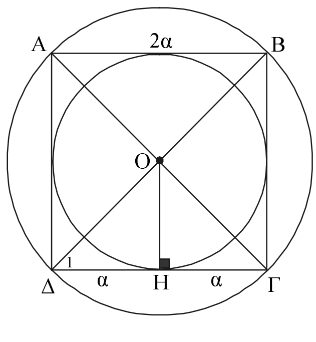
$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2$ ή $ΑΓ^2 = (2R)^2 + (2R)^2$

ή $ΑΓ^2 = 8R^2$

Ο λόγος εμβαδών των δύο κύκλων (Α, ΑΓ), (Ο, R) είναι:

$$\frac{E_{(Α,\, ΑΓ)}}{E_{(Ο,\, R)}} = \frac{πΑΓ^2}{πR^2} = \frac{π8R^2}{πR^2} = 8$$

23. Το τρίγωνο ΔΟΓ είναι ορθογώνιο στο Ο και ισοσκελές (ΔΟ = ΟΓ). Επίσης ΟΗ ⊥ ΔΓ.



Άρα ΔΗ = ΗΓ = α και ΟΗ = α.

Στο τρίγωνο ΟΗΔ, $\hat{Δ}_1 = 45°$, $\hat{H} = 90°$.

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα:

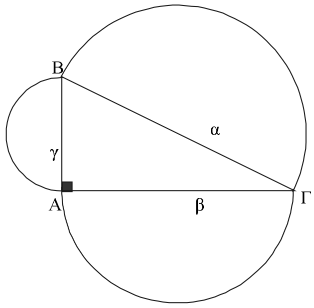
$ΔΟ^2 = ΔΗ^2 + ΗΟ^2$,

$ΔΟ^2 = α^2 + α^2$ ή $ΔΟ^2 = 2α^2$ (1)

α) $E_{(Ο,\, ΟΗ)} = π \cdot ΟΗ^2 = πα^2$

β) $E_{(Ο,\, ΟΔ)} = π \cdot ΟΔ^2 \overset{(1)}{=} π \cdot 2α^2$, άρα: $\frac{E_{(Ο,\, ΟΔ)}}{E_{(Ο,\, ΟΗ)}} = \frac{2πα^2}{πα^2} = 2$

24. Για το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:



$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \ \text{ ή } \ \frac{\pi\alpha^2}{4} = \frac{\pi\beta^2}{4} + \frac{\pi\gamma^2}{4} \ \text{ ή}$$

$$\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \ \text{ ή}$$

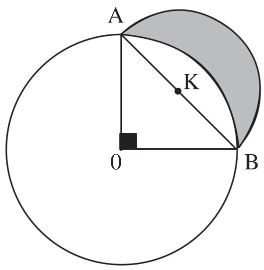
$$E_\alpha = E_B + E_\gamma$$

Με E_α συμβολίζουμε το εμβαδό του κύκλου με διάμετρο α

Με E_β συμβολίζουμε το εμβαδό του κύκλου με διάμετρο β

Με E_γ συμβολίζουμε το εμβαδό του κύκλου με διάμετρο γ.

25. α) Είναι ΟΑ = ΟΒ = R, $E_{OAB} = \frac{1}{2}RR = \frac{R^2}{2}$



β) $E_{ΜΗΝΙΣΚΟΥ} =$

$E_{ΗΜΙΚΥΚΛΙΟΥ\ (Κ,\ ΚΒ)} - [E_{ΚΥΚΛΙΚΟΥ\ ΤΟΜΕΑ\ ΑΟΒ} - E_{ΑΟΒ}]$ (Ι)

Στο ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ

(ΟΑ = ΟΒ = R, $\hat{O} = 90°$) έχουμε:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \ \text{ ή } \ (2KB)^2 = R^2 + R^2 \ \text{ ή } \ 4KB^2 = 2R^2 \ \text{ ή } \ KB^2 = \frac{R^2}{2} \quad (1)$$

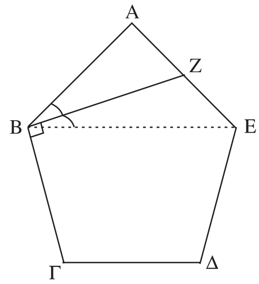
$$E_{ΗΜΙΚΥΚΛΙΟΥ\ (Κ,\ ΚΒ)} = \frac{\pi KB^2}{2} \overset{(1)}{=} \frac{\pi\frac{R^2}{2}}{2} = \frac{\pi R^2}{4} \quad (2)$$

$$E_{ΚΥΚΛΙΚΟΥ\ ΤΟΜΕΑ\ ΑΟΒ} - E_{ΑΟΒ} = \frac{\pi R^2 90}{360} - \frac{R^2}{2} = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} \quad (3)$$

Από την ισότητα (Ι):

$$E_{ΜΗΝΙΣΚΟΥ} = E_{ΗΜΙΚΥΚΛΙΟΥ\ (Κ,\ ΚΒ)} - [E_{ΚΥΚΛΙΚΟΥ\ ΤΟΜΕΑ\ ΑΟΒ} - E_{ΑΟΒ}] \overset{(2),(3)}{=}$$

$$\frac{\pi R^2}{4} - \left(\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}\right) = \frac{R^2}{2}$$



26. Αν $\hat{\omega}$ είναι η κεντρική γωνία του κανονικού πενταγώνου τότε:

$\hat{\omega} = \dfrac{360^\circ}{5}$ ή $\hat{\omega} = 72^\circ$

Αν $\hat{\varphi}$ η εσωτερική γωνία του κανονικού πενταγώνου είναι:

$\hat{\varphi} + \hat{\omega} = 180^\circ$ ή $\hat{\varphi} = 180^\circ - 72^\circ$ ή $\hat{\varphi} = 108^\circ$

Στο τρίγωνο ΑΒΕ είναι ΑΒ = ΑΕ (ισοσκελές), άρα:

$A\hat{B}E = A\hat{E}B$, τότε $2A\hat{B}E + \hat{A} = 180^\circ$ ή $2A\hat{B}E = 180^\circ - 108^\circ$ ή

$2A\hat{B}E = 72^\circ$ ή $A\hat{B}E = 36^\circ$

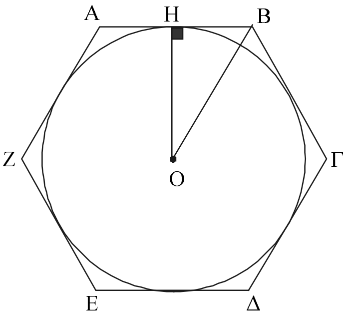
Η $E\hat{B}\Gamma = A\hat{B}\Gamma - A\hat{B}E$ ή $E\hat{B}\Gamma = 108^\circ - 36^\circ$ ή $E\hat{B}\Gamma = 72^\circ$.

Όμως $Z\hat{B}\Gamma = Z\hat{B}E + E\hat{B}\Gamma = \dfrac{A\hat{B}E}{2} + E\hat{B}\Gamma = \dfrac{36^\circ}{2} + 72^\circ = 18^\circ + 72^\circ = 90^\circ$

Άρα $ZB \perp B\Gamma$.

27. Από την προηγούμενη λύση της (26), έχουμε: $E\hat{B}\Gamma = 72^\circ$ και $B\hat{\Gamma}\Delta = 108^\circ$, άρα $E\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta = 72^\circ + 108^\circ = 180^\circ$. Τότε ΒΕ // ΓΔ, αφού οι εντός και επί τα αυτά των ΒΕ, ΓΔ που τέμνονται από τη ΒΓ είναι παραπληρωματικές.

28. Από το σχήμα: $OH = 3$ cm, $OB = x$, $HB = \frac{x}{2}$.



Στο $\overset{\Delta}{OHB}$: $OB^2 = OH^2 + HB^2$ ή

$x^2 = 3^2 + \frac{x^4}{4}$ ή $\frac{3x^2}{4} = 9$ ή $x^2 = 12$ ή

$x = 2\sqrt{3}$ cm. Όμως:

$\alpha'_6 = OH = 3$ cm, $AB = 2HB$ ή $AB = x = 2\sqrt{3}$.

Άρα α) $\lambda'_6 = 2\sqrt{3}$ cm

β) $\alpha'_6 = 3$ cm

γ) $E_{ΑΒΓΔΕΖΗ} = 6E_{AOB} = 6\,\frac{\lambda'_6\,\alpha'_6}{2} = 6\,\frac{2\sqrt{3}\cdot 3}{2} = 18\sqrt{3}$ cm^2

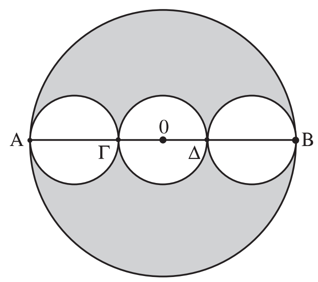
29. Είναι $\lambda_3 = 9$ cm. Γνωρίζουμε ότι $\lambda_3 = R\sqrt{3}$, τότε $R\sqrt{3} = 9$ ή $R = 3\sqrt{3}$ cm

α) Το μήκος του κύκλου $L = 2\pi R = 2\pi\cdot 3\sqrt{3} = 6\pi\sqrt{3}$ cm

β) $E_{\text{τριών κυκλικών τμημάτων εκτός τριγώνου}} = \pi R^2 - E_{\text{ισοπλευρ.}} = \pi\,(3\sqrt{3})^2 - \frac{\lambda_3^2\sqrt{3}}{4} =$

$27\pi - \frac{9^2\sqrt{3}}{4} = (27\pi - \frac{81\sqrt{3}}{4})$ cm^2 $= 9\,(3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4})$ cm^2.

30. α) $\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{6\alpha}{2}\right)^2 = \pi\,(3\alpha)^2 = 9\pi\alpha^2$, $AB = 6\alpha$



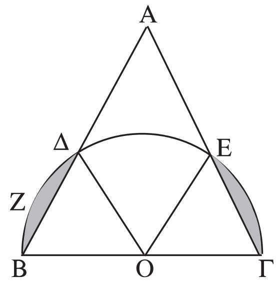
β) Είναι $ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ = \frac{AB}{3} = \frac{6\alpha}{3} = 2\alpha$.

Τότε $\pi\left(\frac{ΑΓ}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{2\alpha}{2}\right)^2 = \pi\alpha^2$

γ) Από το (α) και το (β) έχουμε: $\frac{3\pi\alpha^2}{9\pi\alpha^2} = \frac{1}{3}$

δ) $E_{\text{γραμμοσκιασμένο}} = E_{(O,\ OA)} - 3E_{\text{μικρού κύκλου}} = 9\pi\alpha^2 - 3\pi\alpha^2 = 6\pi\alpha^2$

31. α) Το τρίγωνο ΟΒΔ είναι ισοσκελές (ΟΒ = ΟΔ) με $\hat{B} = 60^\circ$, άρα είναι ισόπλευρο. Το ίδιο και για το τρίγωνο ΟΕΓ.



β) Είναι: $E_{\text{κυκλικού τομέα ΟΔΖΒ}} = \dfrac{\pi\,(OB)^2 \cdot 60}{360} =$

$$= \frac{\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{6} = \frac{\pi\alpha^2}{24}$$

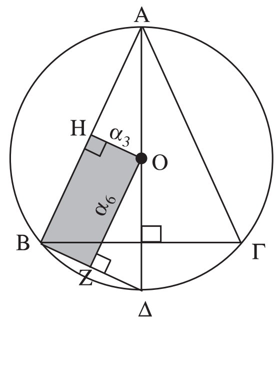
γ) Τα εμβαδά των δύο γραμμοσκιασμένων κυκλικών τμημάτων είναι:

$$E = 2\left(\frac{\pi\alpha^2}{24} - E_{\Delta BO}\right) = 2\left(\frac{\pi\alpha^2}{24} - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}\right) = 2\left(\frac{\pi\alpha^2}{24} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16}\right) =$$

$$= \frac{\pi\alpha^2}{12} - \frac{\sqrt{3}\,\alpha^2}{8} = \frac{\alpha^2}{4}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

32. Είναι: $\dfrac{E_{\text{εγ/νου}}}{E_{\text{περ/νου}}} = \left(\dfrac{\alpha_3}{\alpha_3'}\right)^2 = \left(\dfrac{R/2}{R}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

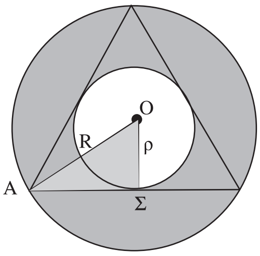
33. α) Η $A\hat{B}\Delta = 90^\circ$ γιατί βαίνει σε ημικύκλιο $\alpha_3 \perp AB$, $\alpha_6 \perp B\Delta$, τότε $\alpha_3 \perp \alpha_6$



β) $E_{AOB} = \dfrac{\alpha_3 \cdot AB}{2} = \dfrac{\frac{R}{2} \cdot R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

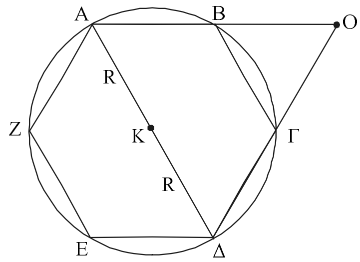
$E_{OB\Delta} = \dfrac{\alpha_6 \cdot B\Delta}{2} = \dfrac{\frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot R}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$, τό-
τε: $E_{AOB} = E_{OB\Delta}$

34. $E_{\sigma\tau\varepsilon\varphi\alpha\nu.} = \pi R^2 - \pi\rho^2 = \pi(R^2 - \rho^2) = \pi \cdot A\Sigma^2$



Όμως $E_{OA\Sigma} = \dfrac{A\Sigma \cdot \rho}{2}$ ή $\dfrac{2E_{OA\Sigma}}{\rho} = A\Sigma$, τότε:

$$E_{\sigma\tau\varepsilon\varphi\alpha\nu.} = \pi A\Sigma^2 = \pi\left(\frac{2E_{OA\Sigma}}{\rho}\right)^2 = \pi\frac{4E^2_{OA\Sigma}}{\rho^2}$$



35. Το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισόπλευρο με πλευρά $A\Delta = 2R$. Άρα:

$$E_{OA\Delta} = \frac{(2R)^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$$

36. $E_{\iota\sigma o\pi\lambda.} = 12\sqrt{3}$ cm^2, όμως $E_{\iota\sigma o\pi\lambda.} = 3\dfrac{\lambda_3\alpha_3}{2} = \dfrac{3R\sqrt{3}\cdot\dfrac{R}{2}}{2} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

Τότε: $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$ ή $R^2 = 16$ ή $R = 4$ cm

α) $\lambda_4 = \sqrt{2}\,R$ ή $\lambda_4 = \sqrt{2}\cdot 4$ ή $\lambda_4 = 4\sqrt{2}$ cm

β) $\alpha_4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}R$ ή $\alpha_4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}4$ ή $\alpha_4 = 2\sqrt{2}$ cm

γ) $E_4 = \lambda_4^2$ ή $E_4 = (4\sqrt{2})^2$ ή $E_4 = 32$ cm^2

37. α) Πλευρά τετραγώνου = 2·40 = 80 m

β) Αξία χωραφιού = 80^2·10.000 = 64.000.000 δρχ.

γ) $E_{\zeta\eta\tau o\acute{\upsilon}\mu\varepsilon\nu o} = 80^2 - \pi\cdot 40^2 = 6400 - 1600\pi = 1600(4 - \pi)$ m^2

38. Είναι διάμετρος $\delta = 0,5$ m, $L_{\tau\rho o\chi o\acute{\upsilon}} = 2\pi\,\dfrac{\delta}{2} = \pi\cdot 0,5$ m

Αν ν ο αριθμός στροφών, τότε $\nu\cdot L_{\tau\rho o\chi o\acute{\upsilon}} = 1.000$ m ή $\nu = \dfrac{1000}{L_{\tau\rho o\chi o\acute{\upsilon}}}$ ή

$\nu = \dfrac{1000}{0,5\pi} = \dfrac{2000}{\pi}$ στροφές.

39. α) Στο κυκλικό πάρκο $R = 6$ m θα εγγραφεί τετράγωνο πλευράς $\lambda_4 = R\sqrt{2}$ ή $\lambda_4 = 6\sqrt{2}$, $E_4 = (6\sqrt{2})^2 = 72$ m^2. Δηλαδή θα χρειαστούν 72:0,09 πλακάκια = 800 πλακάκια.

β) Αν Ε το μέρος που δεν έχει πλακάκια, θα είναι:

$E = \pi R^2 - \lambda_4^2$ ή $E = \pi 6^2 - (6\sqrt{2})^2$ ή $E \approx 3,14\cdot 36 - 72$ ή $E \approx 41,04$ m^2

Το κόστος είναι $41,04 \cdot 3.000 = 123.120$ δρχ.